УДК 519.853

АЛГОРИТМ ОТСЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОДНОВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ И НАДГРАФИКА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Р.С. ЯРУЛЛИН

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail YarullinRS@gmail.com

A CUTTING ALGORITHM BASED ON THE SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF THE FEASIBLE SET AND THE EPIGRAPH OF THE OBJECTIVE FUNCTION

R.S. YARULLIN

Kazan Federal University

Аннотация

Предлагается алгоритм решения задачи выпуклого программирования. Алгоритм относится к классу методов отсечений. Его особенность заключается в том, что для построения итерационных точек используется аппроксимация как области ограниченний, так и эпиграфа целевой функции. Обсуждаются свойства алгоритма. Доказывается его сходимость.

Ключевые слова: Алгоритм отсечений, отсекающие плоскости, надграфик, допустимая область, сходимость алгоритма, задача выпуклого программирования.

Summary

Propose an algorithm for solving a convex programming problem. The algorithm belongs to the class of cutting methods. The feature of the algorithm is the following. Simulteneuos approximation of the epigraph and the feasible set is used to construct an iteration points. Discuss features of the algorithm. Prove its convergence.

Key words: A cutting algorithm, cutting planes, epigraph, a feasible set, convergence of the algorithm, a convex programming problem

Введение

Для решения задач выпуклого программирования на практике довольно часто используются так называемые методы отсечений (напр., [1 − 4]). Обычно в этих методах для нахождения приближений применяется аппроксимация либо надграфика целевой функции, либо области ограничений исходной задачи. Предлагаемый здесь алгоритм отсечений характерен тем, что в процессе решения происходит аппроксимация как допустимой области задачи, так и надграфика. Такая особенность позволяет для построения итерационной точки решать на каждом шаге вспомогательную задачу линейного программирования независимо от вида функций, определяющих исходную задачу.

1. Постановка задачи

Пусть $f(x)$, $F(x)$ − выпуклые в n-мерном евклидовом пространстве R_n функции,

$$D = \{x \in R_n : F(x) \leqslant 0\},$$

функция $f(x)$ достигает на множестве D минимального значения, внутренность множества D непуста. Решается задача

$$\min\{f(x) : x \in D\}. \tag{1}$$

Положим $f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $\mathrm{epi}\,(f, G) = \{u = (x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in G,\ \gamma \geqslant f(x)\}$, где $G \subset R_n$, $\mathrm{int}\,G$ — внутренность множества G, $W'(z, Q) = \{b \in R_{n+1} : ||b|| = 1,\ \langle b, u - z\rangle \leqslant 0\ \forall u \in Q\}$ и $W''(t, L) = \{a \in R_n : ||a|| = 1,\ \langle a, y - t\rangle \leqslant 0\ \forall y \in L\}$ — множества нормированных обобщенно-опорных векторов для множества $Q \subset R_{n+1}$ в точке $z \in R_{n+1}$ и множества $L \subset R_n$ в точке $t \in R_n$ соответственно. Пусть $x^* \in X^*$, $K = \{0, 1, \dots\}$.

2. Алгоритм решения задачи и его обсуждение

Предлагаемый метод решения задачи (1) вырабатывает последовательность приближений $\{(y_i, \gamma_i)\}$, $i \in K$, и заключается в следующем.

Строятся выпуклое ограниченное замкнутое множество $G_0 \subset R_n$ и выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_{n+1}$ такие, что

$$x^* \in G_0, \quad \mathrm{epi}\,(f, R_n) \subset M_0. \tag{2}$$

Выбираются точки $v' \in \mathrm{int}\,\mathrm{epi}\,(f, R_n)$, $v'' \in \mathrm{int}\,D$. Задается такое число α, что $\alpha \leqslant \bar{f} = \min\{f(x) : x \in G_0\}$. Полагается $i = 0$.

1. Находится решение $u_i = (y_i, \gamma_i)$, где $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, следующей задачи:

$$\gamma \to \min \tag{3}$$

$$(x, \gamma) \in M_i, \quad x \in G_i, \quad \gamma \geqslant \alpha. \tag{4}$$

Если

$$y_i \in D, \quad f(y_i) = \gamma_i, \tag{5}$$

то y_i — решение задачи (1), и процесс построения итерационных точек завершается.

2. В интервале (v', u_i) выбирается точка z'_i таким образом, чтобы $z'_i \notin \mathrm{int}\,\mathrm{epi}\,(f, R_n)$ и при некотором $q'_i \in [1, q']$, $q' < +\infty$, для точки

$$\bar{v}'_i = u_i + q'_i(z'_i - u_i) \tag{6}$$

выполнялось включение $\bar{v}'_i \in \mathrm{epi}\,(f, R_n)$.

3. Выбирается конечное множество $B_i \subset W'(z'_i, \mathrm{epi}\,(f, R_n))$, и полагается

$$M_{i+1} = M_i \bigcap T_i, \tag{7}$$

где $T_i = \{u \in R_{n+1} : \langle b, u - z'_i\rangle \leqslant 0\ \forall\, b \in B_i\}$.

4. Если $y_i \in D$, то полагается

$$G_{i+1} = G_i, \tag{8}$$

и следует переход к п. 6. В противном случае в интервале (v'', y_i) выбирается точка z''_i так, чтобы $z''_i \notin \mathrm{int}\,D$ и при некотором $q''_i \in [1, q'']$, $q'' < +\infty$, для точки

$$\bar{v}''_i = y_i + q''_i(z''_i - y_i)$$

выполнилось включение $\bar{v}''_i \in \mathrm{int}\,D$. Следует переход к очередному пункту.

5. Выбирается конечное множество $A_i \subset W''(z''_i, D)$, и полагается

$$G_{i+1} = G_i \bigcap P_i, \tag{9}$$

где $P_i = \{x \in R_n : \langle a, x - z''_i\rangle \leqslant 0\ \forall a \in A_i\}$.

6. Значение i увеличивается на единицу, и следует переход к п. 1.

Сделаем относительно предложенного алгоритма некоторые замечания. Покажем прежде всего, что задача (3), (4) разрешима при любом $i \in K$.

Лемма 1. *Для каждого $i \in K$ выполняются следующие включения:*

$$x^* \in G_i, \tag{10}$$

$$\mathrm{epi}\,(f, R_n) \subset M_i. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку множества M_0, G_0 выбраны согласно (2), то справедливы включения (10), (11) при $i=0$. Допустим теперь, что (10), (11) справедливы при любом фиксированном $i=l\geqslant 0$. Покажем, что

$$x^*\in G_{l+1}, \tag{12}$$

$$\operatorname{epi}(f,R_n)\subset M_{l+1}, \tag{13}$$

тогда утверждение леммы будет доказано.

Согласно алгоритму множество G_{l+1} задается в виде (8) или (9). Если $G_{l+1}=G_l$, то включение (12) выполняется ввиду сделанного индукционного предположения. Поэтому будем считать, что $G_{l+1}=G_l\bigcap P_l$. Согласно выбору точки z_l'' и множества A_l выполняется включение $D\subset P_l$. Отсюда и из (9) с учетом того, что $x^*\in G_l$, следует (12).

Далее, по индукционному предположению $\operatorname{epi}(f,R_n)\subset M_l$. Кроме того, по выбору точки z_l' и множества B_l выполняется включение $\operatorname{epi}(f,R_n)\subset T_l$. Тогда ввиду (7) справедливо соотношение (13). Лемма доказана.

В силу выбора значений α, $\bar f$ и множества G_0

$$f^*\geqslant\alpha. \tag{14}$$

Тогда из леммы 1 и неравенства (14) вытекает

Лемма 2. *Для всех $i\in K$ точка (x^*,f^*) удовлетворяет ограничениям задачи (3), (4).*

Леммой 2 обоснована разрешимость задачи (3), (4). Докажем теперь критерий остановки, заложенный в п. 1 алгоритма.

Поскольку для всех точек (x,γ), удовлетворяющих условиям (4), при всех $i\in K$ выполняется неравенство $\gamma_i\leqslant\gamma$, то из леммы 2 следует

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{\gamma_i\}$, $i\in K$, построена предложенным алгоритмом. Тогда справедливы неравенства*

$$\gamma_i\leqslant f^*\quad\forall i\in K. \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть при некотором $i\in K$ выполняются соотношения (5). Тогда $y_i\in X^*$.*

Доказательство. Поскольку выполняются неравенства (15) и второе из условий (5), то $f(y_i)\leqslant f^*$. С другой стороны, $f(y_i)\geqslant f^*$, так как по условию выполняется включение $y_i\in D$. Таким образом, $f(y_i)=f^*$, и теорема доказана.

Замечание 1. *Аппроксимирующие множества M_0, G_0 удобно задавать многогранными с практической точки зрения. В таком случае в силу (7) − (9) задачи (3), (4) при всех $i\in K$ будут задачами линейного программирования.*

Замечание 2. *Множество M_0 можно задать совпадающим с R_{n+1}. Этим объясняется наличие неравенства $\gamma\geqslant\alpha$ в ограничениях (4).*

Замечание 3. *В случае, если допустимое множество D задано системой линейных неравенств, то естественно положить $G_0=D$, поскольку нет необходимости в построении аппроксимирующих D множеств. Тогда согласно (8) будут выполняться равенства $G_i=D$ для всех $i\in K$.*

Замечание 4. *Если*

$$f(x)=\max_{1\leqslant j\leqslant m} f_j(x),$$

и функции $f_j(x)$ линейны, то удобно положить $M_0=\operatorname{epi}(f,R_n)$. Тогда точками z_i' можно считать точки пересечения интервала (v',u_i) с границей множества $\operatorname{epi}(f,R_n)$, чтобы полагать $M_{i+1}=M_i$ для всех $i\in K$.

3. Обоснование сходимости алгоритма

На основе методики близкой к [2] доказывается следующая

Лемма 4. *Пусть последовательности* $\{u_i\}$, $\{y_i\}$, $i \in K$, *построены предложенным алгоритмом, и* $\{u_i\}$, $i \in K' \subset K$, $\{y_i\}$, $i \in K'' \subset K$, *— их сходящиеся подпоследовательности. Тогда*

$$\lim_{i \in K'} ||z'_i - u_i|| = 0,$$

$$\lim_{i \in K''} ||z''_i - y_i|| = 0.$$

С помощью леммы 4 нетрудно доказать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Для любой предельной точки* $\bar{u} = (\bar{y}, \bar{\gamma})$ *последовательности* $\{(y_i, \gamma_i)\}$, $i \in K$, *выполняются включения*

$$\bar{u} \in \mathrm{epi}\,(f, R_n), \quad \bar{y} \in D. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{(y_i, \gamma_i)\}$, $i \in K$, *построена предложенным алгоритмом. Тогда для любой ее предельной точки* $\bar{u} = (\bar{y}, \bar{\gamma})$ *справедливо включение* $\bar{y} \in X^*$.

Доказательство. Пусть $\bar{u} = (\bar{y}, \bar{\gamma})$ — предельная точка сходящейся подпоследовательности $\{(y_i, \gamma_i)\}$, $i \in K' \subset K$. Сразу отметим, что $\bar{y} \in D$ согласно лемме 5, и, значит,

$$f(\bar{y}) \geqslant f^*. \tag{17}$$

Кроме того, в силу (16)

$$\bar{\gamma} \geqslant f(\bar{y}). \tag{18}$$

Далее, поскольку $(y_i, f(y_i)) \in \mathrm{epi}\,(f, R_n)$, $i \in K$, то ввиду (11)

$$(y_i, f(y_i)) \in M_i \quad \forall i \in K. \tag{19}$$

Так как $y_i \in G_i \subset G_0$, $i \in K$, то $f(y_i) \geqslant \bar{f}$, $i \in K$, и, следовательно,

$$f(y_i) \geqslant \alpha \quad \forall i \in K. \tag{20}$$

Согласно (3), (4) для любой точки $(x, \gamma) \in R_{n+1}$, удовлетворяющей условиям (4), выполняется неравенство $\gamma \geqslant \gamma_i$ при каждом $i \in K$. Но для точки $(y_i, f(y_i))$ эти условия имеют место согласно включениям $y_i \in G_i$ и (19), а также неравенству (20). Таким образом,

$$f(y_i) \geqslant \gamma_i \tag{21}$$

для всех $i \in K$. Переходя в (21) к пределу по $i \to \infty$, $i \in K'$, получим $f(\bar{y}) \geqslant \bar{\gamma}$. Отсюда и из (18) следует равенство $f(\bar{y}) = \bar{\gamma}$, а значит, из (15) имеем $f(\bar{y}) \leqslant f^*$. Тогда с учетом (17) $f(\bar{y}) = f^*$, и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Булатов В.П.** Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977. — 161 с.
2. **Заботин И.Я., Яруллин Р.С.** Метод отсечений с обновлением погружающих множеств и оценки точности решения // Ученые записки Казанского университета. Сер. физ.-матем. науки. — Т. 155, кн. 2 — 2013. — С. 54–64.
3. **Левитин Е.С., Поляк Б.Т.** Методы минимизации при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 787–823.
4. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. — М: Наука, 1983. — 384 с.

REFERENCES

1. **Bulatov V.P.** Embedding methods in optimization problems [Metody pogruzhenija v zadachakh optimizatcii]. — Novosibirsk: Nauka, 1977. — 161 p. (in Russian)
2. **Zabotin I.Ya., Yarullin R.S.** A cutting-plane method with updating of approximating sets and estimates of the solution accuracy [Metod otsechenii s obnovleniem pogruzhajuschikh mnozhestv i otcenki tochnosti reshenija] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. — V. 155, № 2. — 2013. — P. 54–64. (in Russian)
3. **Levitin E.S., Polyak B.T.** Constrained minimization methods // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1966. — V. 6, № 5. — P. 1–50.
4. **Polyak B.T.** Introduction to Optimization. — New York: Optimization Software, 1987. — 464 p.